Γραμμική Άλγεβρα 2.

Ιανουαρίου

Θέμα εξετάσεων 2014-2015 → 1^{o} Να βρεθούν τα $a,b \in \mathbb{R}$ με $a+b+2 \neq 0$ ώστε το γραμμικό σύστημα

$$(\Sigma) \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+ay+bz=1 \\ x+y+az=b \\ bx+y+z=a \end{cases}$$

(i) να έχει μοναδική (ii) καμία (iii) άπειρες λύσεις

Συμπέρασμα (ii) Αν $a \neq b$ αδύνατο, (i) αν $a=b$ και $a\neq 1$ μοναδική λύση

(iii) $a=b=1$ άπειρες λύσεις.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ο επαυξημένος. Από την θεωρία αφού $A \in \mathbb{F}^{4\times 3}$ $\Rightarrow$ βαθμίδα$(A) \leq 3$. Ο B 4×4 Άρα βαθμίδα$(B) \leq 4$ και βαθμίδα$(B)=4 \Leftrightarrow$ $\det B \neq 0$. Από την θεωρία: σύστημα αδύνατο $\Leftrightarrow$ βαθμίδα$(A) <$ βαθμίδα(B).

Άρα $\det B \neq 0 \Rightarrow$ αδύνατο

$$B=\begin{bmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad \det B \overset{\substack{r_1 \mapsto r_1+r_2 \\ r_1 \mapsto r_1+r_3 \\ r_1 \mapsto r_1+r_4}}{=} \det \begin{bmatrix} a+b+2 & a+b+2 & a+b+2 & a+b+2 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$=(a+b+2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{bmatrix} = (a+b+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & a-1 & b-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & b-1 \\ b & 1-b & 1-b & 1-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+2)\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & 0 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)(a+b+2)\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & 0 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-b)(a+b+2)\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & -(a-1) \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (a-b)(a+b+2)\left((b-1)^2+(a-1)^2\right)$$

Άρα $\det B \neq 0 \iff a \neq b$. Άρα για $a \neq b$ το (Σ) αδύνατο (2)

(Υποθέτουμε ότι $a=b$ και παίρνουμε την εξής υποορίζουσα (3×3) του A.) Ξέρουμε ότι βαθμίδα(A) = 3 ⟺ ο A έχει 3×3 υποπίνακα με μη μηδενική ορίζουσα

Υποπίνακας του A (για $a=b$)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(1-a^2) =$$

$(1-a)^2(1+a)$. Άρα η περίπτωση $a=-1$ αποκλείεται γιατί $a=b$ και $a+b+2 \neq 0$. Άρα αν $a \neq 1$ και του -1, βαθμίδα(A) = 3. Αφού $3 \leq$ βαθμίδα(A) $\leq$ βαθμίδα(B) ≤ 3 ⟹ βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B) = 3 ⟹ αφού ο αριθμός των αγνώστων ίσο με 3, μοναδική λύση

Μένει η περίπτωση $a=1=b$ είναι

$$(\Sigma')\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

(άπειρες λύσεις)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντισυμμετρικός, δηλ. $A^t = -A$. Δείξτε ότι αν n περιττός $\det(A)=0$. Βρείτε αντισυμμετρικό με ορίζουσα ίση με 2.

Από την θεωρία $\det(A)=\det(A^t)$, γνωρίζουμε ότι αν πολ/σουμε μία στήλη του A με λ, η ορίζουσα πολ/ται με λ. Ο πίνακας λA προκύπτει από τον A πολ/ντας κάθε στήλη με λ. Αφού ο A έχει n στήλες ⟹ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Για $\lambda = 1$ και n περιττός οπότε $(-1)^n = -1$ παίρνουμε $\det A = (-1)^n \det A$ ⟹ $\det A = -\det A$ ⟹ $2\det A = 0$ ⟹ $\det A = 0$. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός με ορίζουσα 2.

3η → $V=\{(x,y,z,\omega)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+\omega=0,\ x+3y+3z+2\omega=0\}$ (3)

Βρείτε βάση του V

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} x+y+z+\omega=0 \\ x+3y+3z+2\omega=0 \end{cases}$ Ο επαυξημένος $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$

Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με $\begin{cases} x+\omega/2=0 \\ y+z+\omega/2=0 \end{cases}$

Επομένως, εκφράζαμε x, y συναρτήσει των z, ω

και $V=\{(-\omega/2, -z-\omega/2, z, \omega) : z,\omega\in\mathbb{R}\}=$

$=\{\omega(-1/2,-1/2,0,1)+z(0,-1,1,0) : z,\omega\in\mathbb{R}\}=$ στο επόμενο ερώτημα

$=\langle(-1/2,-1/2,0,1),(0,-1,1,0)\rangle$ και συνεχίζουμε

2ος τρόπος για την 1η Άσκηση.

$B=\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[r_1\mapsto r_1+r_4]{\substack{r_1\mapsto r_1+r_2 \\ r_1\mapsto r_1+r_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} a+b+2 & a+b+2 & a+b+2 & a+b+2 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\mapsto r_1/(a+b+2)}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ b & 1 & 1 & a \end{array}\right] \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & 1-b & 1-b & a-b \end{array}\right]$

Περιπτώσεις: 1η περίπτωση: για b = 1 $\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right]$

Περίπτωση 1.1 $b=1, a\neq 1$ ⇝ άπειρες λύσεις

Περίπτωση 1.2 $b=1, a\neq 1$ ⇝ αδύνατο, γιατί έχουμε εξίσωση $0=a-1$

2η περίπτωση: $b\neq 1$

4η → $\det\begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c & c \\ a & b & c & d & d & d \\ a & b & c & d & e & e \\ a & b & c & d & e & f \end{bmatrix}$ (4)

Διαδοχικά $r_6 \mapsto r_6 - r_5$, μετά $r_5 \mapsto r_5 - r_4$, $r_4 \mapsto r_4 - r_3$, μετά $r_3 \mapsto r_3 - r_2$ μετά $r_2 \mapsto r_2 - r_1$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c-d & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d-c & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e-d & e-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f-e \end{vmatrix} =$$

(ορίζουσα άνω τριγωνικού = γινόμενο διαγώνιων στοιχείων)

$= a(b-a)(c-d)(d-c)(e-d)(f-e)$.